单元 A9：二元及三元线性方程组

特定目标：

1. 利用高斯消去法解线性方程组。
2. 认识解的存在性及唯一性。

内容	时间分配	教学建议
9.1 高斯消去法及梯阵式	5	适合下列两个性质的矩阵称为梯阵式： (1) 首 k 行非零；其余各行为零。 (2) 每一非零行的第一个非零元素为 1，并出现在前一行第一个非零元素的右列。 *例*： 以下 5×8 矩阵是梯阵式： $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 学生应懂得利用高斯消去法解二元及三元的线性方程组，方法就是利用行的基本运算将一矩阵变为梯阵式。 *例*： 解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ 3x_1+x_2-2x_3=1 \\ 4x_1-3x_2-x_3=3 \\ 2x_1+4x_2+2x_3=4 \end{cases}$ 增广矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		原方程组与下列方程组等价 $\begin{cases} x_1 \quad\quad -x_3 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 = 1 \\ \quad\quad x_3 = 1 \end{cases}$ 由此可得 $x_1 = 1$， $x_2 = 0$， $x_3 = 1$。
9.2 解的存在性及唯一性	5	学生应知道二元或三元线性方程组的解的存在性及唯一性条件。 对于二元线性方程组： $a_1x + b_1y = d_1$ $a_2x + b_2y = d_2$ (i) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$，方程组有唯一解。 几何上，方程组代表一对相交的直线。 (ii) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ 及 $\det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$， 方程组无解。几何上，方程组代表一对平行（而不重合）的直线。 (iii) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ 及 $\det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$， 方程组有无穷多解。几何上，方程组代表一对重合的直线 教师应与学生讨论一些如下列的三元方程组例子。当学生掌握了三维坐标几何的意义后，其几何解释可加以讨论。 (i) 在解方程组 $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 5x - 4y + 7z = 1 \\ 7x - 3y + 6z = 8 \end{cases}$ 时， 明显地第三式是多余的。教师可与学生讨论求得解 $x = \frac{29 - 3\lambda}{13}$， $y = \frac{33 + 19\lambda}{13}$，$z = \lambda$ 的方法，其中 λ 是任意数。

42

内容	时间分配	教学建议
	10	（ii） 解不一致方程组如 $\begin{cases} x + y + z \quad = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$。 循此路向，可以更抽象形式表示三元线性方程组的解的存在性及唯一性条件。

43

表示删去的内容